1) *при любом* $t \in [a,b]$ *выполняется* $|x(t) - q(t)| \leq \xi(v)(t)$

2)$||X(r - lx)||_{C^n[a,b]} \leq \lambda\alpha||\xi(v)||_{C^1[a,b]}$

3) *при п. в.* $t \in [a,b]$ *справедливо* $|(\mathcal{L}x)(t) - \omega(t)| \leq k(t) + \beta(t)||\xi(v)||_{C^1[a,b]}$,
где функции $v, \xi(v), \lambda$ *определены соотношениями* (6), (12), (10), *число* α *и функции* k, β *удовлетворяют неравенствам* (8), (5), (7) *соответственно.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

2. *Булгаков А. И., Панасенко Е. А.* Квазилинейные краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Известия Института математики и информатики. Ижевск, 2006. № 2(36). С. 13 – 16.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 04-01-00324) и Норвежского комитета по развитию университетской науки и образования – NUFU (проект № PRO 06/02).

Поступила в редакцию 8 ноября 2006 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

© А.И. Булгаков, Д.Н. Протасов, О.В. Филиппова

Обозначим comp $[\mathbb{R}^n]$ множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$; $\rho[\cdot,\cdot]$ – расстояние между точкой и множеством и $h[\cdot,\cdot]$ – расстояние между множествами пространства $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим дифференциальное включение с импульсными воздействиями

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)),\ t \in [a,b] \setminus \{t_0\}.\ (t_0 \in (a,b)),\ x(a) = x_0,\ \Delta x(t_0) = \beta,\ (x_0, \beta \in \mathbb{R}^n), \tag{1}$$

где $\Delta x(t_0) = x(t_0^+) - x(t_0^-)$, $x(t_0^+) = \lim\limits_{h\to 0_+} x(t_0 + h)$, $x(t_0^-) = \lim\limits_{h\to 0_+} x(t_0 - h)$.

Будем предполагать, что отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to$ comp $[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет следующим условиям: при всех $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо; существует суммируемая функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется равенство

$$h[F(t,x); F(t,y)] \leqslant l(t)|x - y|;$$

функция $||F(t,0)|| : [a,b] \to [0,\infty)$, определенная равенством

$$||F(t,0)|| = \sup_{y \in F(t,0)} |y|,$$

суммируема.

Под решением задачи (1) понимаем функцию $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывную на каждом из отрезков $[a, t_0]$, $(t_0, b]$, для которой существует такая суммируемая функция $q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо включение $q(t) \in F(t, x(t))$ и всюду на отрезке $[a,b]$ выполняется равенство

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)ds + \chi([t_0, b])\beta, \tag{2}$$

где $\chi([\cdot])$ – характеристическая функция отрезка.

Пусть функция $p : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ суммируема и пусть функция $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ задана равенством

$$y(t) = y(a) + \int_a^t p(s)ds + \chi([t_0, b])\alpha. \tag{3}$$

Пусть суммируемая функция $\varkappa : [a,b] \to [0, \infty)$ при почти всех $t \in [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho\,[p(t), F(t, y(t))] \leqslant \varkappa(t). \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть функция $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ задана равенством (2). Тогда существует такое решение $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ задачи (1), что для любого $t \in [a,b]$ выполняется неравенство*

$$|y(t) - x(t)| \leqslant \varphi(t)$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ справедлива оценка

$$|q(t) - p(t)| \leqslant \varkappa(t) + l(t)\varphi(t),$$

где функции $q(\cdot)$, $p(\cdot)$ представимы равенствами (2), (3), $\varkappa(\cdot)$ удовлетворяют оценке (4), функция $\varphi(\cdot)$ задана равенством

$$\varphi(t) = |x_0 - y(a)| e^{\int_a^t l(s)ds} + \int_a^t e^{\int_s^t l(\tau)d\tau} \varkappa(s)ds + |\alpha - \beta| e^{t - t_0} \chi([t_0, b]).$$

Пусть $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ суммируемая функция. Будем говорить, что функция $z : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, представимая равенством

$$z(t) = x_0 + \int_a^t g(s)ds + \chi([t_0, b])\beta,$$

является квазирешением задачи (1), если найдется такая последовательность суммируемых функций $q_i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, что для любого $i = 1, 2, \ldots, q_i(t) \in F(t, z(t))$ при почти всех $t \in [a,b]$ и последовательность $x_i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, заданная равенством (2), при $q = q_i$ стремится к функции $z(\cdot)$ равномерно на $[a,b]$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) \in \mathrm{co}\ (\mathrm{F}(\mathrm{t}, \mathrm{x}(\mathrm{t}))),\ \mathrm{t} \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \setminus \{\mathrm{t}_0\}\ (\mathrm{t}_0 \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})),\ \ \mathrm{x}(\mathrm{a}) = \mathrm{x}_0,\ \ \Delta \mathrm{x}(\mathrm{t}_0) = \beta, \tag{6}$$

где $\mathrm{co}(\cdot)$ выпуклая оболочка множества.

Пусть H, $\widetilde{H}$ – множество решений и квазирешений задачи (1), а H_{co} – множество решений задачи (6).

Теорема 2. *Справедливо равенство $\widetilde{H} = H_{\mathrm{co}}$.*

Обозначим через $\overline{H}$ множество таких функций $z : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, представимых равенством (5), для которых найдется последовательность решений $x_i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$ задачи (1), что $x_i \to z$ при $i \to \infty$ равномерно на $[a,b]$.

Теорема 3. *Справедливо равенство $\overline{H} = H_{\mathrm{co}}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. *Филиппов А.Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестник МГУ. Серия: Математика и механика. М., 1967. № 3. С. 16-26.
3. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К.: Вища шк., 1987.
4. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 04-01-00324) и Норвежского комитета по развитию университетской науки и образования – NUFU (проект № PRO 06/02).

Поступила в редакцию 8 ноября 2006 г.

О НЕЛИНЕЙНОЙ W-ПОДСТАНОВКЕ И ТЕОРИИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

© **Т.В. Жуковская**

Многие функционально-дифференциальные уравнения могут быть записаны в виде

$$Fx = f, \tag{1}$$

где оператор $F : D \to B$, $f \in B$ – известный, а $x \in D$ – искомый элементы, причем D и B являются банаховыми пространствами и D изоморфно декартовому произведению $B \times R^n$. При изучении таких функционально-дифференциальных уравнений можно использовать W-подстановку Н.В. Азбелева, с помощью которой краевая задача для уравнения (1) сводится к уравнеию в "пространстве решений" D или в "пространстве производных решений" B [1, с. 30]. W-подстановка осуществляет изоморфизм $B \times R^n \to D$.

При исследовавнии ряда теоретических и прикладных вопросов для нелинейных функционально-дифференциального уравнений требование линейности взаимно-однозначного соответствия между D и $B \times R^n$ оказывается ненужным. Кроме того, решение конкретных уравнений бывает целесообразно искать в множествах, не имеющих линейной структуры. Перечисленные соображения заставляют рассматривать уравнение (1) в предположении, что D и B – некоторые множества, для которых существует взаимно-однозначное соответствие между D и $B \times \Lambda$, $\Lambda \subset R^n$. Обозначим биективное отображение $B \times \Lambda \to D$ через W, а обратное отображение $D \to B \times \Lambda$ через $(\delta,\, r)$. Тогда краевая задача для уравнения (1) с условием $rx = \alpha$, $\alpha \in \Lambda$, равносильна уравнению $FW(y, \alpha) = 0$ относительно $y = \delta x$.

Применим эту идею к исследованию систем, в которых решение подвергается импульсному воздействию в фиксированый момент времени $t_0 \in [a, b]$, а величина этого воздействия зависит от состояния системы на промежутке времени $[a, t_0]$.

Пусть $C([a, t_0], R^n)$ – пространство непрерывных на $[a, t_0]$ функций $x : [a, t_0] \to R^n$ с нормой $\|x\|_C = \max\limits_t |x(t)|$; $P : C([a, t_0], R^n) \to R^n$ – n-мерный непрерывный ограниченный вектор-функционал, $L([a, b], R^n)$ – пространство суммируемых функций $y : [a, b] \to R^n$, с нормой $\|y\|_L = \int\limits_a^b |y(s)| ds$; $CS([a, b], R^n)$ – множество функций $x : [a, b] \to R^n$, непрерывных на $[a, t_0]$ и $(t_0, b]$, имеющих в точке t_0 скачок величины $x(t_0 + 0) - x(t_0) = Px^{t_0}$, где x^{t_0} является сужением x на $[a, t_0]$, с метрикой $\rho(x_1, x_2) = \max\limits_t |x_1(t) - x_2(t)|$; $ACS([a, b], R^n)$ – множенство функций